

# 2. Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano

PGF 5005 - Mecânica Clássica

[web.if.usp.br/controle](http://web.if.usp.br/controle)

(Referência principal: Lichtenberg e Lieberman,  
Regular and Chaotic Motion, 1992)

IFUSP, 2024

Modelo físico  $\rightarrow$  equações de movimento

Equações de movimento  $\rightarrow \leftarrow$  equações de Lagrange, equações de Hamilton, equações canônicas

## Coordenadas Generalizadas

$N$  partículas com massa  $m_k$  e coordenadas  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$   
com  $C$  relações independentes

$$f_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, C$$

Esse sistema tem  $3N - C$  graus de liberdades e seu estado é  
descrito pelas coordenadas e velocidades

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N), \quad \dot{\mathbf{X}} = (\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N)$$

A evolução das variáveis é determinada pelas soluções das equações diferenciais

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = -\nabla_k V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) + \text{forças de vínculo}$$

Nessa disciplina vamos considerar  $3N - C$  coordenadas generalizadas e seus momentos associados.

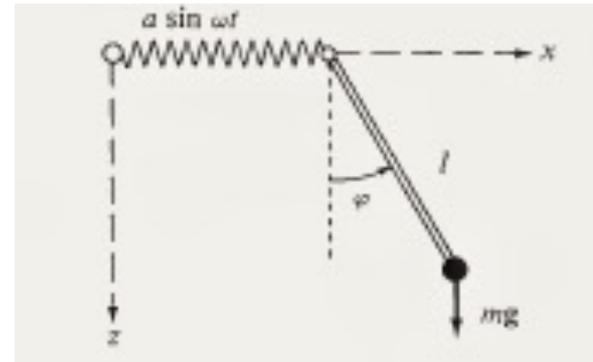
## Exemplo

Coordenada generalizada

$$q \equiv \varphi(t).$$

$$z = l \cos q,$$

$$x = l \sin q + a \sin \omega t.$$



$$T = \frac{1}{2}m[l^2\dot{q}^2 + 2a\omega\dot{q} \cos q \cos \omega t + a^2\omega^2 \cos^2 \omega t].$$

Energia cinética

$$V = -mgl \cos q.$$

Energia potencial

Um grau de liberdade:  $T, V$  dependem de  $\dot{q}, q$

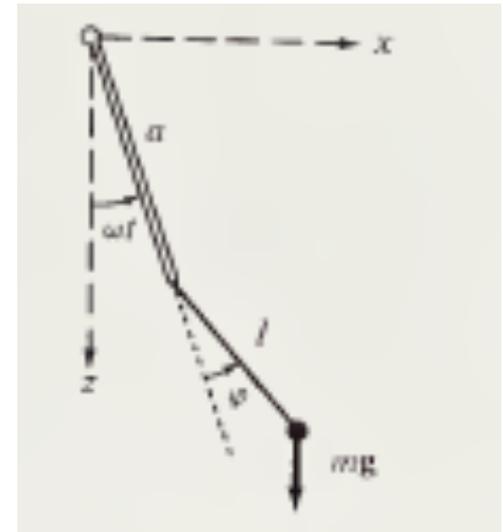
$E = T + V$  depende de  $t$

Exemplo de  $V$  dependente do tempo

Haste  $a$  com  $\omega$  constante

$$z = a \cos \omega t + l \cos(\omega t + q),$$

$$x = a \sin \omega t + l \sin(\omega t + q).$$



$$T = \frac{1}{2}ml^2(\omega + \dot{q})^2 + m a l \omega (\omega + \dot{q}) \cos q + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2,$$

$$V = -mgz = -mg[a \cos \omega t + l \cos(\omega t + q)]$$

$$E(t) = T + V$$

Energia depende do tempo devido ao forçamente para manter haste girando uniformemente.

Um grau de liberdade.

## Coordenadas generalizadas $q_1, \dots, q_n$

Sistema descrito pelas variáveis  
n graus de liberdade,  $n < N$

$$q_k, \dot{q}_k \stackrel{\text{def}}{=} dq_k/dt, \quad k = 1, \dots, n$$

Lagrangiana definida por

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i(q, \dot{q}, t)^2 - V(x_1(q, t), \dots, x_N(q, t), t)$$

Equações de movimento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

## Descrição em coordenadas generalizadas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{Equação de movimento}$$

$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - U(\mathbf{q}, t)$  Lagrangiana: diferença entre a energia Cinética  $T$  e a energia potencial  $U$

$L$  pode ser obtida por um princípio variacional  $\delta \int L dt = 0$

A Hamiltoniana é definida como  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ .

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Momento linear introduzido como  $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Da equação anterior obtemos as equações de Hamilton  
(equações de movimento com as variáveis coordenadas e momentos  
generalizados  $q, p$ )

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Obtemos também a relação

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

# Lagrangiana de Uma Partícula

$$L = T - V$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{Equação de movimento}$$

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \equiv F_{ix}$$

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

# Momento

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv L(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \right)$$

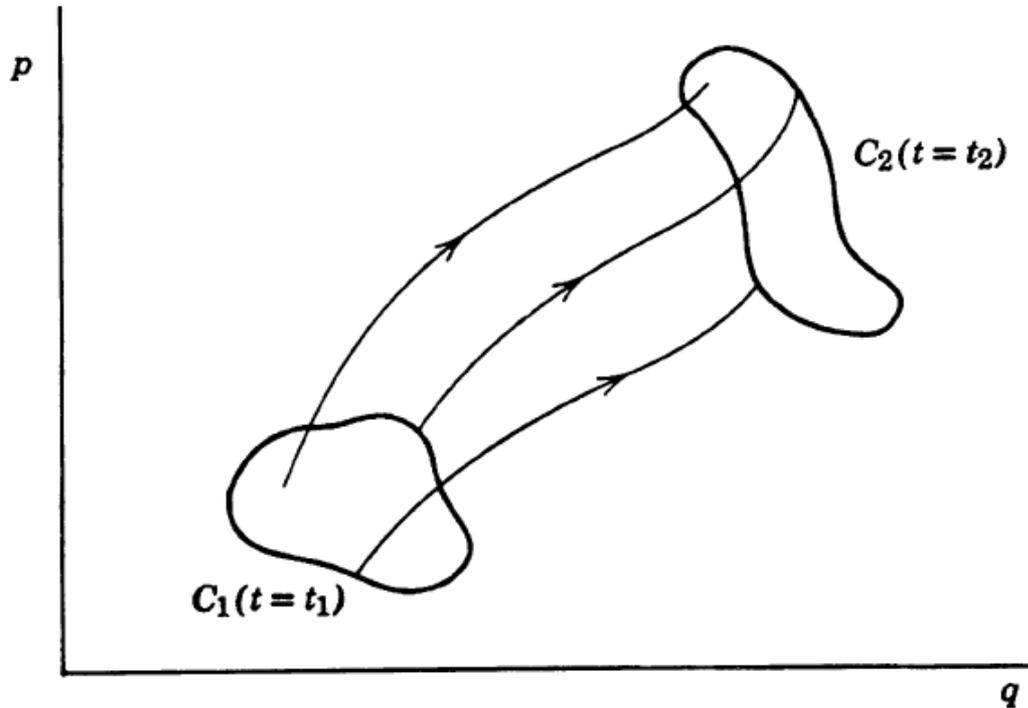


$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \right)$$

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x}$$

$p_x$  constante de movimento

# Movimento no Espaço de Fase



Dados c.i.  $q_1, p_1$  em  $t_1$   
obtemos  $q_2, p_2$  em  $t_2$

# Teorema de Liouville

$$\tau = \tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \quad \text{Densidade de condições iniciais}$$

$$\int_{\text{all space}} \tau \prod_i dp_i dq_i = 1 \quad \text{Normalização}$$

$$d\mathcal{N} = \tau \prod_i dp_i dq_i \quad \text{Probabilidade de encontrar variáveis no intervalo } q_i + dq_i \text{ e } p_i + dp_i$$

A variação de pontos  $d\mathcal{N}$  no intervalo  $\prod_i dp_i dq_i$

é obtida da equação de continuidade

$$\frac{\partial d\mathcal{N}}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial p_i} (d\mathcal{N} \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i} (d\mathcal{N} \dot{q}_i) \right) = 0$$

Dividindo  $\mathcal{N}$  pelo volume  $V$  obtemos a densidade de pontos  $\tau$  no espaço de fase

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left( \dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \tau \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \tau \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0$$

Usando eqs. Hamilton, segundo e quarto termos na somatória se cancelam.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Do slide anterior obtemos

$$\sum_i \left( \dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \quad \text{Teorema de Liouville}$$

Incompressibilidade do fluxo de trajetórias no espaço de fase !